

A INVENÇÃO DO MAPA DE MERCATOR NO SÉC. XVI: SUBSÍDIOS HISTÓRICOS PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Vera Lúcia Vieira de Camargo
Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT/SINOP
profveracamargo@gmail.com

Resumo: Em função das necessidades oriundas das grandes navegações do século XVI o geógrafo e cartógrafo Gerhard Kremer (1512-1594), conhecido pelo nome latinizado Gerardus Mercator desenvolveu um mapa que, ao se traçar neste uma linha reta entre dois pontos era fornecida aos navegadores a direção para seguir trajetos no globo terrestre orientados pela agulha da bússola com direção sempre constante. O fato instigante neste processo é que para sua elaboração foi utilizado o conceito intuitivo da integral da secante um século antes da formalização do Cálculo com Newton e Leibniz e, além disso, esta trajetória se revela no globo terrestre como uma espiral esférica quando se prossegue em direção aos pólos. Acreditamos que esta abordagem oferece possibilidades aos professores para mostrar aos alunos de Cálculo, por meio deste instigante problema histórico, como a Matemática pode ser utilizada para atender as necessidades em diversos contextos das atividades humanas.

Palavras-chave: História da Matemática; Mapa Mercator; Loxodromia; Cálculo.

1 UM PROBLEMA DA NAVEGAÇÃO E O MAPA DE MERCATOR

Tuchinsky(1981) em seu artigo intitulado: “Mercator’s World Map and the Calculus”, traz o seguinte problema: - Imagine um navegador do tempo de Mercator tendo que se deslocar de uma localidade para outra por meio de um navio, utilizando somente uma bússola e mapas. Quais propriedades deveriam ter o mapa para que ele chegasse ao destino? Buscando atender a este tipo de problema Mercator elaborou um mapa, de forma que, traçando nele uma linha reta entre as duas localidades, o mapa fornecia o ângulo formado com os meridianos da Terra, conforme ilustrado na Figura 1. Uma trajetória com esta característica é denominada *linha de rumo* ou *loxodromia* ou *loxodromes* (do latim *loxos* – inclinação e *dromes* - correndo).

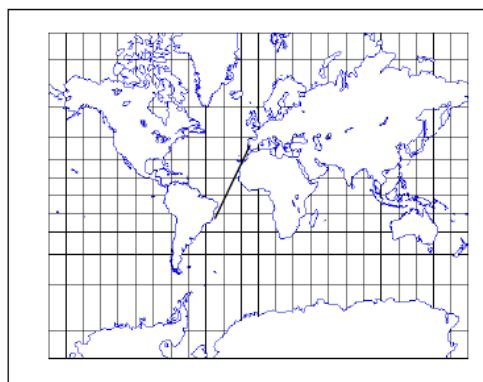
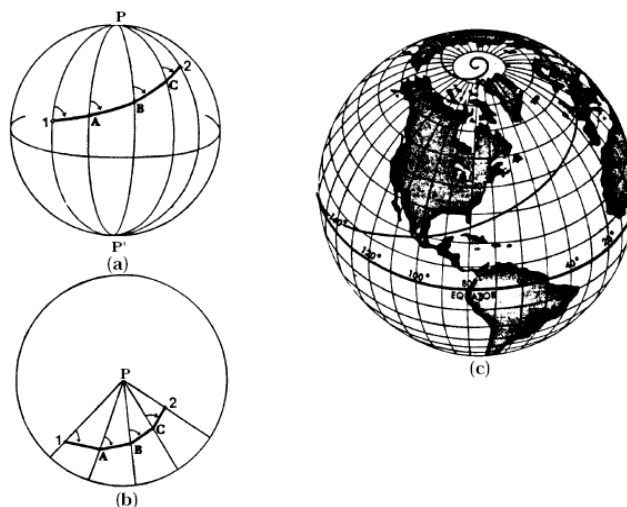


Figura 1 Trajetória pela linha de rumo.

Diferente das projeções cartográficas que precederam ao Mapa de Mercator de 1569, este não usava uma malha de coordenadas aleatórias, mas se apoiava na matematização da forma esférica como ele concebia a Terra o que lhe permitiu traçar um sistema de coordenadas no qual as distorções estivessem matematicamente e antecipadamente controladas. Do ponto de vista da navegação, a projeção de Mercator possuía uma característica gráfica de utilização incomparável, uma vez que a *loxodromia* é representada por uma linha reta, que faz com os meridianos um ângulo constante e igual ao seu azimute, que é o ângulo formado com o norte magnético da Terra e, cuja inclinação pode ser medida diretamente no mapa e assim, mantendo a mesma direção na bússola, o navio chega tranquilamente ao seu destino.

Por outro lado, a forma da curva produzida pela *loxodromia* no globo terrestre é uma curva tridimensional que se continuada, vai sendo espiralada nas proximidades dos pólos sem, no entanto, chegar a tocá-los. Na realidade, se considerarmos um navio seguindo uma rota mantendo sempre a mesma inclinação com os meridianos a curva obtida será uma **espiral esférica**, que tem um número infinito de revoluções orbitais, com a distância entre elas diminuindo com a aproximação da curva a qualquer um dos pólos.

Ressalte-se que a trajetória da *loxodromia* no globo terrestre só não será uma porção de uma espiral esférica nos casos de trajetórias entre dois pontos situados no mesmo meridiano ou no mesmo paralelo, pois nestes casos, a curva será o menor arco da circunferência do meridiano ou do paralelo que liga os dois pontos.



A Figura 2

ilustra em (a)

a *loxodromia* Figura 2 Trajetória sobre a Linha de Rumo no globo terrestre. Extraído de [1]. em

b) o arco de *loxodromia* que une os pontos 1 e 2. Note que os ângulos $P\hat{1}A$, $P\hat{A}B$, $P\hat{B}C$ são todos iguais na trajetória do ponto 1 a 2. A figura (c) mostra a forma espiral no globo terrestre da *loxodromia*. Podemos observar nela que a curva forma com os meridianos ângulos sempre iguais e que, seguindo para os pólos, a curva tem formato de espiral. (Exemplo extraído do livro Navegação: A Ciência e a Arte: Navegação Costeira, Estimada e em águas restritas).

A projeção de Mercator é classificada pela Cartografia como uma **projeção cilíndrica equatorial conforme**, *cilíndrica*, porque a superfície da Terra é projetada inicialmente em um cilindro, conforme ilustrado na Figura 3 e, posteriormente é aberto e desenrolado sobre o plano; *equatorial* em função de que o cilindro é tangente à superfície da Terra no equador e *conforme* porque os ângulos são representados no plano sem deformação e em consequência disto a forma de regiões de pequenas áreas são mantidas.

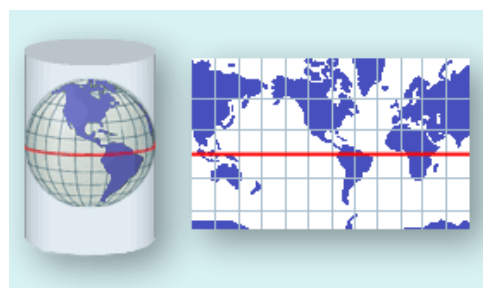


Figura 3 Projeção Cilíndrica. Extraída de [2]

2 AS PROPRIEDADES MATEMÁTICAS PRESENTES NA ELABORAÇÃO DO MAPA DE MERCATOR

Baseando-se em Tuchinsky(1981) e Ávila(2008) apresentamos a seguir as idéias que nortearam a elaboração do Mapa de Mercator. Para construí-lo, inicialmente toma-se o equador como uma linha de rumo na direção leste-oeste, que no mapa é representado por uma reta horizontal. Os meridianos também são linhas de rumo, mas na direção norte-sul que são representados no mapa por uma família de retas verticalmente espaçadas uniformemente. Por outro lado, sabemos que o ângulo que cada paralelo faz com os meridianos é de 90° , então as retas que representam os paralelos devem ser perpendiculares à família de retas que representam os meridianos. Até agora, muito fácil, mas como garantir que a representação das outras linhas de rumo seja reta no mapa? Precisamos colocar os paralelos das latitudes com tal espaçamento que qualquer linha de rumo seja uma linha reta no mapa. Para isso, devemos estudar

primeiro o alongamento horizontal que ocorreu no mapa. As distâncias entre os meridianos em todos os paralelos no mapa deverão ser iguais e assim sendo, as distâncias entre eles em cada paralelo no mapa serão proporcionalmente maiores que as distâncias no globo. Vamos então estudar este alongamento horizontal.

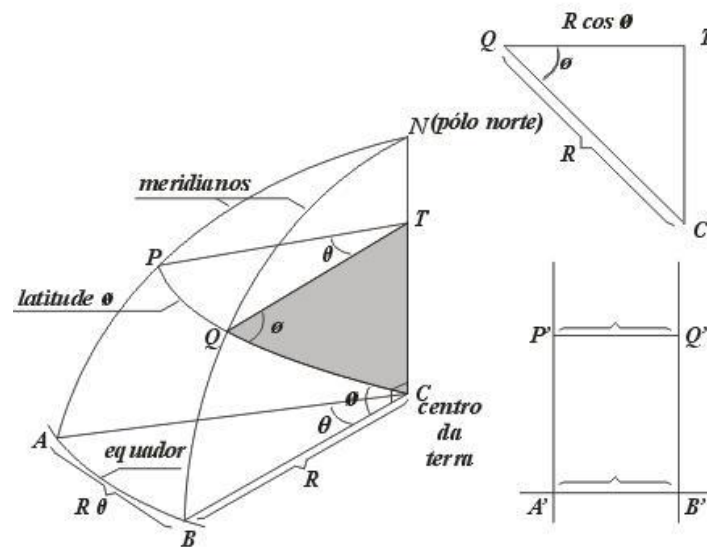


Figura 4 Fatia do globo terrestre e representação correspondente no mapa de Mercator.

Seja o globo terrestre representado por uma fatia da esfera de raio R , conforme mostra a Figura 4, de maneira que \widehat{AB} e \widehat{PQ} sejam arcos de paralelos entre dois meridianos, sendo o primeiro, parte do equador e o segundo, parte do paralelo de latitude ϕ .

Temos que $A'B'$ é o correspondente de \widehat{AB} no mapa plano. Temos ainda a condição de que distâncias ao longo do equador devem ser conservadas na construção do mapa plano de acordo com a escala desejada.

Pela geometria elementar temos que $\widehat{AB} = R \cdot \theta$. Sendo \widehat{PQ} de latitude ϕ ao norte, resulta que $QT = R \cos \phi$. O setor PTQ tem o mesmo ângulo central do setor ACB , então o comprimento de $\widehat{PQ} = QT \cdot \theta = R \cos \phi \theta = R \theta \cos \phi$. Como $\widehat{AB} = R\theta$ resulta que

$$\widehat{PQ} = \widehat{AB} \cos \phi. \quad (1)$$

Na representação do mapa plano temos a correspondência $\widehat{AB} = A'B'$ e, como nele os meridianos são paralelos, então $\widehat{AB} = A'B' = P'Q'$.

De (1) temos então $\overline{P'Q'} = P'Q' \cos \phi$ e então $P'Q' = \overline{P'Q'} \frac{1}{\cos \phi}$, logo,

$$P'Q' = \overline{P'Q'} \sec \phi. \quad (2)$$

De (2) podemos perceber que o comprimento de $P'Q'$ no mapa é o comprimento de $\overline{P'Q'}$ multiplicado pelo fator $\sec \phi$. Como $\sec \phi > 1$ para valores de ϕ entre 0 e 90°, a representação das distâncias entre os meridianos vão se expandindo do fator $\sec \phi$ e as distorções vão aumentando conforme $|\cos \phi|$ tende a zero (próximo aos pólos).

Para determinar a distância para locar as linhas dos paralelos ao longo dos meridianos, Mercator percebeu que, assim como aconteceu o alongamento da distância entre os meridianos, cada distância vertical do paralelo de latitude ϕ poderia também ser esticada no mapa com o mesmo fator $\sec \phi$ e assim, ficariam preservados os ângulos. Como a linha de rumo corta todos os meridianos sob um mesmo ângulo na Terra e o mapa é conforme, denominação dada aos mapas que possuem a propriedade de conservar ângulos, resulta que, as linhas de rumo do mapa deverão cortar todas as verticais paralelas do meridiano sob um ângulo fixo e a curva que faz isto é a reta. Então o segredo estava em descobrir qual o espaçamento correto entre as linhas horizontais no mapa que preservasse os ângulos.

A seguir, mostramos que o deslocamento representado no mapa é alongado também do fator $\sec \phi$. Seja um ponto P com latitude ϕ que se desloca de Δz ao longo de uma linha de rumo e que faz um ângulo α com o meridiano local e seu complementar seja $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, conforme Figura

5.

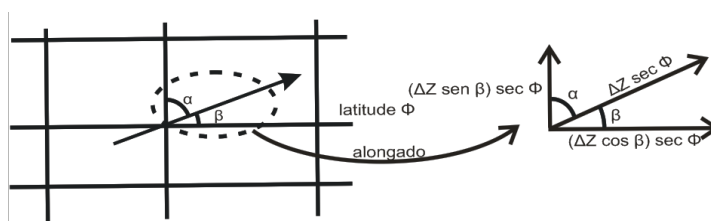
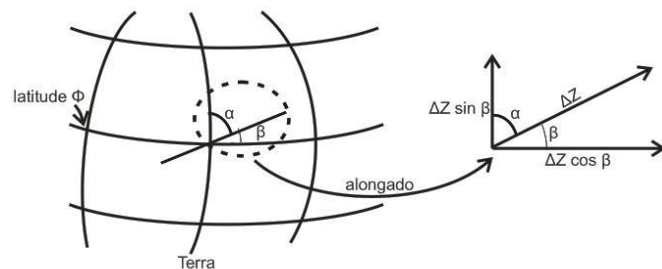


Figura 5 Representação do mesmo local no globo e no mapa de Mercator.

O que este deslocamento implicará no mapa de Mercator? As componentes horizontal e vertical de Δz são respectivamente: $\Delta z \cos \beta$ e $\Delta z \sin \beta$. Como vimos o deslocamento horizontal é aumentado pelo fator $\sec \phi$ e se os ângulos α e β forem preservados no mapa, a componente vertical também será multiplicada pelo fator $\sec \phi$ para preservar o ângulo da linha de rumo com os meridianos. Assim o deslocamento de Δz no globo resultará em $\Delta z' = \Delta z \sec \phi$ no mapa, pois:

$$\Delta z'^2 = \Delta z^2 \sin^2 \beta \sec^2 \phi + \Delta z^2 \cos^2 \beta \sec^2 \phi = \Delta z^2 \sec^2 \phi (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta), \quad \text{que resulta em}$$

$$\Delta z' = \Delta z \sec(\phi) \quad (3)$$

Podemos então afirmar que a *linha de rumo* no mapa plano será retilínea e fará o mesmo ângulo α com as imagens de todos os meridianos.

Como locar os paralelos no Mapa de Mercator? Aqui surge os prenúncios dos conceitos de integral. Como determinar o comprimento do segmento $A'P'$ a partir do arco \widehat{AB} ?

Vamos tomar ϕ_0 como a latitude do ponto P e $D(\phi_0)$ a distância no mapa de Mercator ao longo do meridiano de longitude θ_0 . Se conhecermos $D(\phi_0)$ saberemos como locar este paralelo no mapa, que corresponde ao comprimento do segmento $A'P'$ da Figura 4. Inicialmente vamos decompor o arco \widehat{AB} numa soma de deslocamentos elementares $\Delta u = R \Delta \phi$ com ϕ variando de 0 a ϕ_0 . Como vimos, no mapa, cada um desses deslocamentos deve ser aumentado pelo fator $\sec \phi$, resultando $\Delta u \sec \phi = R \sec \phi \Delta \phi$. Para facilitar o desenvolvimento, vamos considerar o raio como unitário. Podemos observar que conforme ϕ varia ao longo de cada meridiano, o respectivo deslocamento elementar é multiplicado por um valor diferente de $\sec \phi$ e, desta maneira, o deslocamento $A'P'$ será aproximadamente igual à soma de todos os deslocamentos elementares.

Conforme aumenta o valor ϕ e, conseqüentemente, de $\sec \phi$, as parcelas deste somatório vão aumentando cada vez mais, o que resulta no aumento das distâncias verticais de forma bem mais acentuada do que nas distâncias horizontais no mapa.

Se $D(\phi)$ é a distância vertical no mapa do paralelo de latitude ϕ e tomando o maior dos comprimentos dos subintervalos $\Delta\phi_i \rightarrow 0$, obteremos aproximações cada vez melhores de $D(\phi)$ e aplicando o limite temos:

$$D(\phi_o) = A'P' = \lim_{\substack{\max \Delta\phi_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sec \bar{\phi}_i \Delta\phi_i, \quad (4)$$

onde $\bar{\phi}_i \in [\phi_{i-1}, \phi_i]$. Na linguagem atual do Cálculo, sendo $d(\phi) = \sec \phi$ contínua no intervalo de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ o limite da soma corresponde à definição da Integral Definida é:

$$D(\phi_o) = A'P' = \lim_{\substack{\max \Delta\phi_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sec \bar{\phi}_i \Delta\phi_i = \int_0^{\phi_o} \sec \phi \, d\phi. \quad (5)$$

Assim, se quisermos encontrar a distância para colocar o paralelo ϕ_o no Mapa de Mercator devemos calcular a integral:

$$D(\phi_o) = \int_0^{\phi_o} \sec u \, du \quad (6)$$

3 A INTEGRAL DA SECANTE NO MAPA DE MERCATOR

Pode-se notar pela expressão acima que para se plotar os paralelos de latitude no mapa de Mercator, era necessário saber calcular o valor de $\int \sec \phi \, d\phi$ para valores de $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$, mas como ele procedia antes mesmo de se conhecer o conceito de integral como conhecemos atualmente? Mercator não conheceu o Cálculo, mas ele sabia como proceder para colocar os paralelos em seu mapa. As idéias intuitivas do conceito da integral como limite da soma, que foram desenvolvidas somente no século seguinte por Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) já estavam ali gravitando no engenho de Mercator. Naturalmente, com os recursos da época, seu mapa continha pequenos erros na colocação dos paralelos e no mapeamento dos rios e continentes, tendo em vista que sua fonte foram velhos mapas e roteiros de viagens notoriamente imprecisos. O matemático Edward Wright publicou em 1599 a primeira explicação do Mapa de

Mercator utilizando o somatório $\sum R \sec \phi \Delta \phi$. Por meio de sua obra, Wright forneceu à navegação uma tabela das aproximações da somatória da integral $R \int \sec \phi d\phi$ para valores de ϕ entre 0 a 45° em intervalos de 1 minuto.

Os geógrafos da época que quisessem entender a construção de Mercator tinham que estimar o valor desta somatória. É muito possível que estas estimativas partissem de idéias que seriam sistematizadas depois no conceito de logaritmo (Napier) e nas tabelas de funções trigonométricas. Em 1620 Edmund Gunter publicou a tabela de logaritmos da tangente. Mais tarde em 1645, Henry Bond publicou a *Epitome of Navigation* que trazia sua descoberta para a integral: $\int_0^\phi \sec u du = -\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right)\right]$ que à época não foi provada, mas que teve contribuições de matemáticos como John Collins, Nicolaus Mercator, W. Oughtred e John Wallis que se basearam na comparação de tabelas e gráficos. Este resultado parece ser subjacente às estimativas de $\sum R \sec \phi \Delta \phi$ feitas até então. Durante a década de 1660 Newton e Leibnitz desenvolveram suas sistematizações do Cálculo Diferencial e Integral. Em 1668 James Gregory provou a integral da secante anteriormente apresentada, utilizando um argumento geométrico. Nas próximas décadas já era possível encontrar cálculos mais simples de $\int \sec \phi d\phi$ e os matemáticos eram bastante conscientes que eles tinham que produzir a matemática necessária para prover de precisão a projeção de Mercator, considerando esta uma tarefa importante e relevante. (TUCHINSKY, 1981) Assim, $\int \sec \phi d\phi$ foi um caso de integral inicialmente tratada como soma, tendência dominante da época e posteriormente podemos encontrar os valores da integral da secante através de qualquer uma das seguintes antiderivadas, conforme abordado em Camargo (2009).

$$\int \sec \phi d\phi = \ln|\sec \phi + \operatorname{tg} \phi| + c$$

$$\int \sec \phi d\phi = -\ln\left|\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right]\right| + c$$

$$\int \sec \phi d\phi = \ln\left|\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)\right]\right| + c$$

onde c é uma constante arbitrária.

Com o objetivo de situar no contexto histórico possível prática da navegação ocorrida algumas décadas antes do tempo de Mercator, Camargo (2009) construiu em seu trabalho uma trajetória hipotética pela *loxodromia* conforme Figura 6 simulando um possível caminho percorrido pelos

navegadores no descobrimento do Brasil em dois trechos: de Lisboa a Cabo Verde e posteriormente de Cabo Verde ao Brasil. Fizemos uma descoberta muito curiosa. Constatamos que a inclinação da reta que nos fornece a linha de rumo entre Lisboa e Cabo Verde é de aproximadamente 28° . Já no segundo trecho, há um pequeno desvio de aproximadamente $1^{\circ}42'$ em relação ao primeiro trecho e

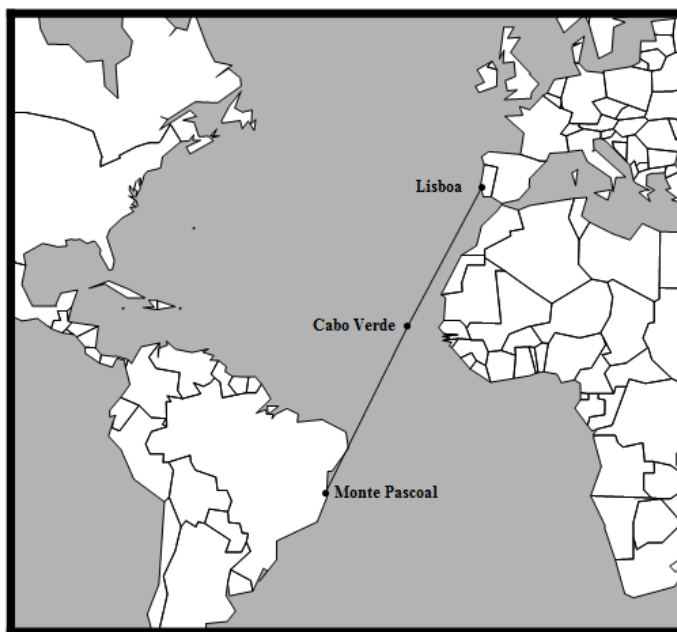


Figura 6 Trajetória hipotética percorrida pelos navegadores no descobrimento do Brasil.

que prosseguindo nesta nova linha de rumo resulta no local que avista

Monte Pascoal em Porto Seguro no Brasil. Acreditamos que isto também mostra indícios de que o “achamento” do Brasil não foi ao acaso, conforme apontado por vários historiadores, pois a rota parece ter sido orientada por uma linha de rumo, o que pode significar que esta técnica de navegação já era conhecida pelos navegadores antes mesmo da invenção do mapa de Mercator, pois conforme o relato em Picado(2006), o fato da imagem da *loxodromia* no mapa ser uma reta já havia sido observado e estudado antes pelo matemático português Pedro Nunes (1502-1578).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema abordado neste artigo trata-se de um recorte do estudo que resultou na dissertação intitulada: “Trajetórias sobre o Globo Terrestre: Um Estudo da Geometria da Esfera nos mapas cartográficos” que teve como objetivo ilustrar como a Matemática pode se associar com outras áreas do conhecimento, em especial, no contexto da Cartografia. Acreditamos que este instigante problema pode favorecer ao aluno do

Cálculo perceber a Matemática enquanto fruto da construção humana e ampliar sua visão sobre a produção do conhecimento matemático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. A Matemática e a Cartografia. In: *Revista do Professor de Matemática*. N° 65, 1º quadrimestre, 2008. p.4-11.

CAMARGO, V.L.V. de. *TRAJETÓRIAS SOBRE O GLOBO TERRESTRE: Um estudo da Geometria da Esfera nos mapas cartográficos*. Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2009.

FEEMANN, T.G. *Portraits of the Earth A Mathematician Looks at Maps*. AMS-American Mathematical Society, USA, 2002.

PICADO, J. *Apontamentos de GEOMETRIA DIFERENCIAL*. Departamento de Matemática – Universidade de Coimbra, 2006. Disponível em <http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0506/Apontamentos/sebenta.pdf>

TUCHINSKY, P.P. Mercator's World Map and the Calculus. Module 206. In: *UMAP - Modules and Monographs in undergraduate mathematics and its applications*. Cambridge, 1981. p. 677-727.

[1] http://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/publica_manual.nav1.html. Acesso em 20.01.08.

[2] http://nationalatlas.gov/articles/mapping/a_projections.html. Acesso em 25.01.08.